

Математические модели в инвестиционных банках Опционы. Лекция 4

Михаил Андреев

апрель 2016

Технологический центр Дойче Банка





$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

- Ω – множество элементарных событий
- $\mathcal{F}$ – σ -алгебра подмножеств Ω
- $\mathbb{P}$ – вероятностная мера.

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$$

$(\mathcal{F}_t)$ – фильтрация вероятностного пространства
 $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, \quad \forall s \leq t, s \geq 0, t \geq 0$



- Безрисковый актив $B = (B_n)$.
- d -мерный рисковый актив $S = (S_n^1, \dots, S_n^d)$

$\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримая последовательность B_n

$\mathcal{F}_n$ -измеримые последовательности S_n^i

дисконтированная цена рискового актива

$$\frac{S_n^i}{B_n}$$



Самофинансируемая стратегия π реализует арбитражную возможность (в момент времени N), если при нулевом начальном капитале $X_0^\pi = 0$ ее капитал в момент времени N : $X_N^\pi \geq 0$ (P - п.н.) и $P(X_N^\pi > 0) > 0$



$$\mathbb{P} \sim \tilde{\mathbb{P}} : \mathbb{P}(A) = 0 \iff \tilde{\mathbb{P}}(A) = 0$$

Первая фундаментальная теорема теории расчетов финансовых активов / The First Fundamental Asset Pricing Theorem



Для того, чтобы (B, S) -рынок был безарбитражным необходимо и достаточно, чтобы существовала (хотя бы одна) мера $\mathbb{Q}$, эквивалентная мере $\mathbb{P}$, т.ч.:

$$E^{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_n^i}{B_n} \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] = \frac{S_{n-1}^i}{B_{n-1}}$$

$\mathbb{Q}$ называется **риск-нейтральной** (risk-neutral) или **мартингальной** мерой.

$$\frac{S_0^i}{B_0} = E^{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_n^i}{B_n} \right]$$



(B, S) -рынок называется полным (N -полным) если всякое $\mathcal{F}_N$ -измеримое ограниченное платежное поручение $f_N = f_N(\omega)$ достижимо. Т.е. найдется самофинансируемый портфель π и начальный капитал x т.ч. $X_0^\pi = x$ и $X_N^\pi = f_N$ ($\mathbb{P}$ -п.н.) [Ширяев]

A market in which every possible contingent claim can be replicated is said to be complete. [Joshi]

При построении репликации мы пренебрегаем накладными издержками (transaction costs, bid-ask spread)

Вторая фундаментальная теорема



(B, S) -рынок является безарбитражным и полным тогда и только тогда, когда существует только одна мартингальная мера.



В 'real-world' мере $\mathbb{P}$:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{P}}$$

$$dB_t = rB_t dt \text{ т.е. } B_t = B_0 e^{rt}$$

Отсюда для дисконтированной цены :

$$d\left(\frac{S_t}{B_t}\right) = (\mu - r) \frac{S_t}{B_t} dt + \sigma \frac{S_t}{B_t} dW_t^{\mathbb{P}}$$



Можно показать (используя теорему Гирсанова), что в риск-нейтральной мере $\mathbb{Q}$:

$$d\left(\frac{S_t}{B_t}\right) = \frac{S_t}{B_t} dW_t^{\mathbb{Q}}$$

Т.е.

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}}$$

$$S(t) = S(t - \Delta t) \exp\left(rt - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t^{\mathbb{Q}}\right)$$

см. применение в методе Монте-Карло.



$$\frac{C_0}{B_0} = E \left[\frac{C_T}{B_T} \right]$$

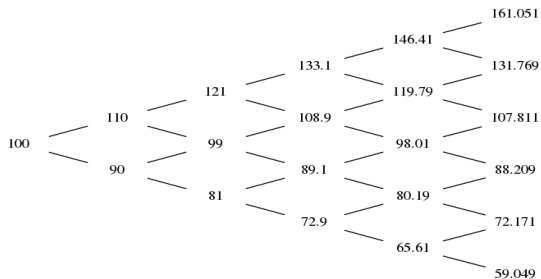
$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{B_0}{B_T} E \left[\max(0, S_0 \exp(rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}N_{(0,1)}) - K) \right] \\ &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \max(0, S_0 \exp(rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}x) - K) dx \end{aligned}$$

Подинтегральное выражение больше нуля, только если

$$S_0 \exp \left(rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}x \right) \geq K$$

$$x \geq \frac{\log(\frac{K}{S_0}) + \frac{1}{2}\sigma^2 T - rT}{\sigma\sqrt{T}} = -d_2$$

Cox-Ross-Rubinstein model



► CRR



$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} = rC$$

Разностные схемы для производных

Forward difference: $\frac{\partial f}{\partial S} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta S}$

Backward difference: $\frac{\partial f}{\partial S} \approx \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta S}$

Central or symmetric difference: $\frac{\partial f}{\partial S} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta S}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \approx \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta S^2}$$

The explicit method



$$rf_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta t} + rS \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta S^2}$$

$$f_{i,j} = a_i f_{i-1,j+1} + b_i f_{i,j+1} + c_i + f_{i+1,j+1}$$

The implicit method



$$rf_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta t} + rS \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta S^2}$$

$$f_{i,j+1} = a_i f_{i-1,j} + b_i f_{i,j} + c_i + f_{i+1,j}$$

$$Mf_j = f_{j+1} - k$$

The Crank-Nicolson method



$$\begin{aligned} \frac{1}{2}rf_{i,j-1} + \frac{1}{2}rf_{i,j} &= \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta t} \\ &+ \frac{1}{2}rS \left[\frac{f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j-1}}{2\Delta S} + \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta S} \right] \\ &+ \frac{1}{4}\sigma^2 S^2 \left[\frac{f_{i+1,j-1} - 2f_{i,j-1} + f_{i-1,j-1}}{\Delta S^2} \right. \\ &\left. + \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta S^2} \right] \end{aligned}$$

$$M_1 f_{j-1} = M_2 f_j$$



Пример

► PDE



► quantlib.org

The QuantLib project is aimed at providing a comprehensive software framework for quantitative finance. QuantLib is a free/open-source library for modeling, trading, and risk management in real-life.

QuantLib is written in C++ with a clean object model, and is then exported to different languages such as C#, Objective Caml, Java, Perl, Python, GNU R, Ruby, and Scheme.

► [QuantLib](https://quantlib.org)



- Ширяев А.Н. – Основы стохастической финансовой математики
- Mark S. Joshi – The Concepts and Practice of Mathematical Finance
- Yves Hilpisch – Python for Finance – <http://python-for-finance.com/>
- Hull, John C. – Options, Futures and Other Derivatives / Джон К. Халл – Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты
- James Ma Weiming – Mastering Python for Finance